Przykładowe zadania
z Konkursu o Złoty Indeks Politechniki Krakowskiej z matematyki

Zadanie 1 Rozwiązać równanie

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{2} \cdot \log^2_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{4} \cdot \log^3_{\frac{1}{2}} x + \ldots + \frac{1}{2^n} \cdot \log^{n+1}_{\frac{1}{2}} x + \ldots = 2.$$

Zadanie 2 Na jednej i tej samej podstawie zbudowano dwa stożki - jeden wewnątrz drugiego. Kąt między wysokością a tworzącą większego stożka ma miarę $\frac{\pi}{4}$, kąt między wysokością a tworzącą mniejszego stożka ma miarę $\frac{\pi}{3}$. Obliczyć objętość bryły zawartej między powierzchniami bocznymi tych stożków wiedząc, że różnica długości wysokości stożków jest równa 4.

Zadanie 3 Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{6}}{3} \sin y \\ \cos x = \sqrt{2} \cos y \end{cases} .$$

Zadanie 4 Trzy koła o promieniu 1 są parami zewnętrznie styczne. Obliczyć pole figury zwartej między tymi kołami.

Zadanie 5 Rozwiązać nierówność

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x-3}{n-\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{4}{x}.$$

Zadanie 6 Rozwiązać nierówność

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{4} < \binom{n+1}{3}.$$

Zadanie 7 Autobus z 6-cioma pasażerami zatrzymuje się na 9-ciu przystankach. Obliczyć prawdopodobieństwo, że:

a) wszyscy pasażerowie wysiądą na tym samym przystanku,

b) na żadnym przystanku nie wysiądzie więcej niż jeden pasażer.

Zadanie 8 Pierwiastek równania

$$5^x - 5^{3-x} = 20$$

jest pierwszym wyrazem ciągu arytmetycznego, zaś pierwiastek równania

$$\log\sqrt{x-5} + \log\sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$$

jest drugim wyrazem tego ciągu. Ile wynosi liczba wyrazów ciągu, gdy suma n wyrazów tego ciągu $S_n = \binom{10}{7} + 8$?

Zadanie 9 Cięciwa paraboli o równaniu $y = -a^2x^2 + 5ax - 4$ jest styczna do krzywej $y = \frac{1}{1-x}$ w punkcie $P(2,-1)$, który dzieli tę cięciwę na połowy. Znaleźć wartość parametru a.

Zadanie 10 Gracz ma do wyboru dwie gry. Pierwsza polega na równoczesnym rzucie symetryczną kostką sześcienną i dwiema monetami. Gracz wygrywa, gdy wyrzuci parzystą liczbę oczek i dwa orły. W drugiej grze spośród 16 kul ponumerowanych liczbami $1, 2, 3, \ldots, 16$, wśród których są tylko cztery kule białe, losuje się bez zwracania trzy kule. Gracz wygrywa, gdy wśród wylosowanych kul są dokładnie dwie kule białe. Niech P_1 oznacza prawdopodobieństwo wygrania w pierwszej grze, a P_2 - prawdopodobieństwo wygrania w drugiej grze. Znaleźć stosunek $\frac{P_1}{P_2}$.

Zadanie 11 W trójkącie równoramiennym ABC o podstawie AB dane są $A(6,2)$, pole trójkąta $P_{ABC} = 50$ oraz równanie osi symetrii tego trójkąta $k: 4x + 3y - 5 = 0$. Obliczyć stosunek długości promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC do długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

Zadanie 12 Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} C_n^{k+1} = \frac{5}{2}n \\ C_{n-1}^{k} = 10 \end{cases}.$$

Zadanie 13 Dana jest funkcja

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2 - 3(n+1)^2 x}{n^2+n+1}.$$

Wskazać własności ciągu $f(1), f(3), f(5), \ldots, f(2n-1), \ldots$.

Zadanie 14 Dana jest funkcja

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}.$$

Rozwiązać równanie

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f'(2)}.$$

Zadanie 15 W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt płaski ściany bocznej przy wierzchołku ostrosłupa ma miarę 2α, zaś długość promienia okręgu wpisanego w tę ścianę jest równa r. Obliczyć pole powierzchni całkowitej S tego ostrosłupa.

Zadanie 16 Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 2n+5\}$ losujemy trzy razy po jednej liczbie bez zwracania. Niech A_n oznacza zdarzenie wylosowania trzech liczb, których suma jest liczbą parzystą, a B_n oznacza zdarzenie wylosowania trzech liczb, których iloczyn jest liczbą parzystą. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} P\left(A_n / B_n\right).$$

Zadanie 17 Rozwiązać równanie

$$2\cos 2x - 8\cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}.$$

Zadanie 18 Dany jest wektor $\vec{a} = [4, -3]$. Znaleźć wektor jednostkowy $\vec{b}$ prostopadły do wektora $\vec{a}$.

Zadanie 19 Napisać równanie okręgu stycznego do dwóch prostych równoległych $y = x - 4$ i $y = x - 12$, jeżeli jego środek leży na prostej $y = -x$.

Zadanie 20 Dla jakiej wartości m styczna do wykresu funkcji $f(x) = mx^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1$ w punkcie $x_0 = -2$ jest równoległa do prostej $3x - 3y + 2 = 0$?

Zadanie 21 W trójkącie prostokątnym równoramiennym poprowadzono środkowe z wierzchołków kątów ostrych. Obliczyć cosinus kąta rozwartego zawartego między nimi.

Zadanie 22 W grupie trzydziestu sportowców jest dwudziestu narciarzy, sześciu kolarzy i czterech biegaczy. Prawdopodobieństwo zakwalifikowania się do zawodów sportowych jest następujące: dla narciarzy 0,9, dla kolarzy 0,5 i dla biegaczy 0,75. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wybrany losowo jeden sportowiec będzie zakwalifikowany do zawodów?

Zadanie 23 Kąt dwuścienny między dwiema sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma miarę $\frac{2}{3}\pi$. Jaką miarę ma kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy?

Zadanie 24 Romb o boku długości a obraca się dookoła jednej z przekątnych. Jakie powinny być długości przekątnych rombu, aby objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu była największa?

Zadanie 25 Dana jest funkcja

$$f(x) = 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \ldots, \quad \text{gdzie } \sin^2 x \neq 1.$$

Wyznaczyć rozwiązania równania

$$\frac{1}{f(x)} + \sin x = 1 + \sin^2 x \quad \text{dla} \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$

które należą do zbioru rozwiązań nierówności

$$\frac{\cos^2 x}{1 - \cos x} \geq 1 + \cos x.$$

Zadanie 26 Rozwiązać równanie

$$\log_{x^2-5x+6}(x+1) + \log_{x^2-5x+6}(x+1)^2 + \ldots + \log_{x^2-5x+6}(x+1)^n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zadanie 27 Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym o różnicy r. Obliczyć

$$r \cdot \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} \right).$$

Zadanie 28 Rozwiązać równanie

$$\sqrt{3 + x - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{8 + x - 6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Zadanie 29 Napisać równanie prostej prostopadłej do stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ w punkcie, w którym istnieje minimum tej funkcji.

Zadanie 30 Podstawą ostrosłupa jest kwadrat. Jedna z krawędzi bocznych jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Najdłuższa krawędź boczna ma długość b i tworzy z przyległymi do niej krawędziami podstawy kąty α. Obliczyć objętość V ostrosłupa.